PART4　２次方程式の解の存在範囲

例題

２次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる２つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

練習

2 次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が 2 より小さい異なる 2 つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

第 8 講　PART4　確認問題

1　2 次方程式 $x^2+2ax+4a-3=0$ が 1 より小さい異なる 2 つの解をもつとき，定数 a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}<a<\boxed{\text{ウ}},\quad \boxed{\text{エ}}<a$$

PART4　２次方程式の解の存在範囲

例題

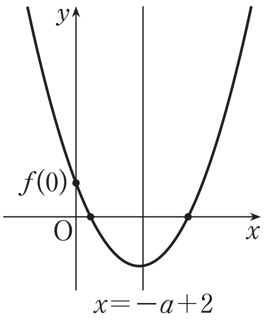
２次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる２つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2+2(a-2)x+a$ とおく。

$f(x)=\{x+(a-2)\}^2-a^2+5a-4$ より，軸の式は $x=-a+2$

また，２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-1\cdot a=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$$



２次方程式 $f(x)=0$ が異なる２つの正の解をもつのは，２次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x>0$ の部分が異なる２点で交わるときである。それは

$D>0$ ……①

$(f(x)$のグラフの軸$)>0$ ……②

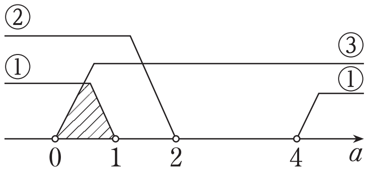
$f(0)>0$ ……③

が同時に成り立つときである。

①より　$(a-1)(a-4)>0$　　$a<1,\ 4<a$

②より　$-a+2>0$　　$a<2$

③より　$a>0$



①，②，③の共通範囲を求めて　　$0<a<1$

練習

２次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が２より小さい異なる２つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2+2ax+2a+3$ とおく。

$f(x)=(x+a)^2-a^2+2a+3$ より，軸の式は $x=-a$

また，２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(2a+3)=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$$

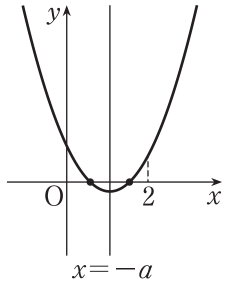
2 次方程式 $f(x)=0$ が 2 より小さい異なる 2 つの解をもつのは，
2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<2$ の部分が
異なる 2 点で交わるときである。それは

$D>0$ ……①

$(f(x)$のグラフの軸$)<2$ ……②

$f(2)>0$ ……③

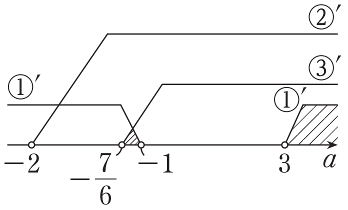
が同時に成り立つときである。



①より　$(a+1)(a-3)>0$　　$a<-1,\ 3<a$ ……①′

②より　$-a<2$　　$a>-2$ ……②′

③より　$2^2+2a\cdot2+2a+3>0$　　$a>-\dfrac{7}{6}$ ……③′



①′，②′，③′の共通部分を求めて　　$-\dfrac{7}{6}<a<-1,\ 3<a$

第 8 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：3，ウ：1，エ：3

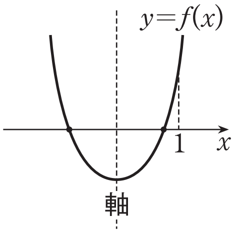
[解説]

$f(x)=x^2+2ax+4a-3$　とおく。

$f(x)=(x+a)^2-a^2+4a-3$

より，軸の式は　$x=-a$

また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると



$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(4a-3)=a^2-4a+3$$

$$=(a-1)(a-3)$$

2 次方程式 $f(x)=0$ が 1 より小さい異なる 2 つの解をもつのは，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<1$ の部分が異なる 2 点で交わるときである。それは，

$D>0$　……①

($f(x)$のグラフの軸)<1　……②

$f(1)>0$　……③ [A]

において，①，②，③が同時に成り立つときである。

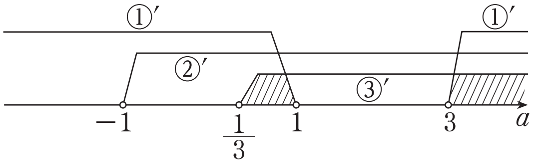
①より　$(a-1)(a-3)>0$　　$a<1,\ 3<a$　……①′

②より　$-a<1$　　$a>-1$　……②′

③より　$f(1)=1^2+2a\cdot1+4a-3>0$　　$6a-2>0$

$a>\dfrac{1}{3}$　……③′

①′, ②′, ③′ の共通部分を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<a<1,\ 3<a}$



[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の存在範囲に関する条件は，2 次関数

$f(x)=ax^2+bx+c$

のグラフを用いて考えることができる。

- 判別式 D
- グラフの軸の位置
- 存在範囲の端点($f(1)$)

に着目する。